Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 3. Übungsserie

Aufgabe 3.1

Die einfache Formel $h_{\mathrm{OK}} = 90° - \phi + \delta$ hat unter anderem das Problem, dass $h_{\mathrm{OK}} > 90°$ herauskommen kann, wenn $\delta > \phi$. Tatsächlich kann ein Objekt aber höchstens 90° oberhalb oder unterhalb des Horizonts stehen. Zur Lösung des Problems kann man nun explizit Formeln für h_{OK} für alle in Abbildung 1 dargestellten Fälle ableiten – oder man betrachtet stattdessen als Hilfsgröße die Zenitdistanz $z = 90° - h$ woraus wir

$$h_{\mathrm{OK}} = 90° - z_{\mathrm{OK}} \tag{1}$$

erhalten. Da $z > 0$, haben wir automatisch $h < 90°$. Um das Maximum, $h = 90°$, zu erreichen, muss das Objekt auf seiner täglichen Bahn durch den Zenit gehen, also durch $z = 0°$. Am geografischen Nordpol (also $\phi = 90°$) fällt der Zenit nun mit dem Himmelsnordpol ($\delta = 90°$) zusammen. Nur Objekte mit $\delta = 90°$ stehen dort im Zenit. Je weiter nach Süden man kommt, desto mehr verschiebt sich der Zenit vom Himmelsnordpol weg. Es bleibt aber dabei, dass nur Objekte mit $\delta = \phi$ den Zenit erreichen können. *Jede* Abweichung von $\delta = \phi$ (egal ob $\delta > \phi$ oder $\delta < \phi$) vergrößert z_{OK}, sodass wir letztlich schreiben können, dass

$$z_{\mathrm{OK}} = |\phi - \delta| \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{h_{\mathrm{OK}} = 90° - |\phi - \delta|}. \tag{2}$$

In Abb. 1 ist dies ersichtlich: Die Länge des grün-schwarz gestrichelten Bogens ergibt sich immer aus $|\phi - \delta|$. Eine analoge Argumentation über die Nadirdistanz führt für die untere Kulmination, also den Tagestiefststand, übrigens zu

$$h_{\mathrm{UK}} = -90° + |\phi + \delta|. \tag{3}$$

Aufgabe 3.2

Da eine Mondfinsternis nichts anderes ist als ein perfekter Vollmond, steht hier die Sonne dem Mond genau gegenüber (d. h. in Opposition, siehe Abb. 2). Die Deklination des Mondes ist damit das Negative der der Sonne ($\delta_{\mathrm{Mond}} = -\delta_{\mathrm{Sonne}}$). Seine Rektaszension ist einen Halbkreis voraus, also $\alpha_{\mathrm{Mond}} = \alpha_{\mathrm{Sonne}} \pm 12$ h. Zum Herbstanfang läuft nun (wie zum Frühlingsanfang) die Sonne auf ihrer scheinbaren Bahn entlang der Ekliptik durch den Himmelsäquator und hat somit eine Deklination von 0° – genau wie dann der Mond, sollte er eben zu dieser Zeit als Vollmond erscheinen, also $\delta_{\mathrm{Mond}} = 0°$. Die Rektaszension der Sonne beträgt zum Herbstanfang $\alpha_{\mathrm{Sonne}} = 12$ h. Ein Vollmond hat zu diesem Zeitpunkt also $\alpha_{\mathrm{Mond}} = 12\text{ h} \pm 12\text{ h} = 0\,\text{h}$.
Oder noch kürzer: Zum Herbstanfang steht die Sonne im Herbstpunkt und ein ihr gegenüber stehender Mond somit im Frühlingspunkt.

Aufgabe 3.3

Sternzeit 12 h bedeuted, dass gerade Objekte mit einer Rektaszension von $\alpha = 12$ h ihren Tageshöchststand haben (sich bei Stundenwinkel $t = 0°$ und somit in oberer Kulmination befinden). Da gegen 12 Uhr mittags (Sonnenzeit) die Sonne kulminiert, muss die Sonne also auch bei $\alpha = 12$ h stehen. Zur Frühlingstagundnachtgleiche steht die Sonne bei $\alpha = 0$ h, also bedeutet $\alpha = 12$ h, dass Herbstanfang ist.

Aufgabe 3.4

Die Zeitgleichung ist eine Überlagerung zweier Anteile. Zum einen ist da eine sinusähnliche Schwingung auf Grund der Abweichung der Ekliptik vom Himmelsäquator. Die Rektaszension, die die (sphärische!) Projektion der ekliptikalen Länge auf die Äquatorialebene darstellt, läuft mal langsamer (jeweils um den Sommer- und Winteranfang) und mal schneller (jeweils um den Frühlings- und Herbstanfang) als eben die ekliptikale Länge

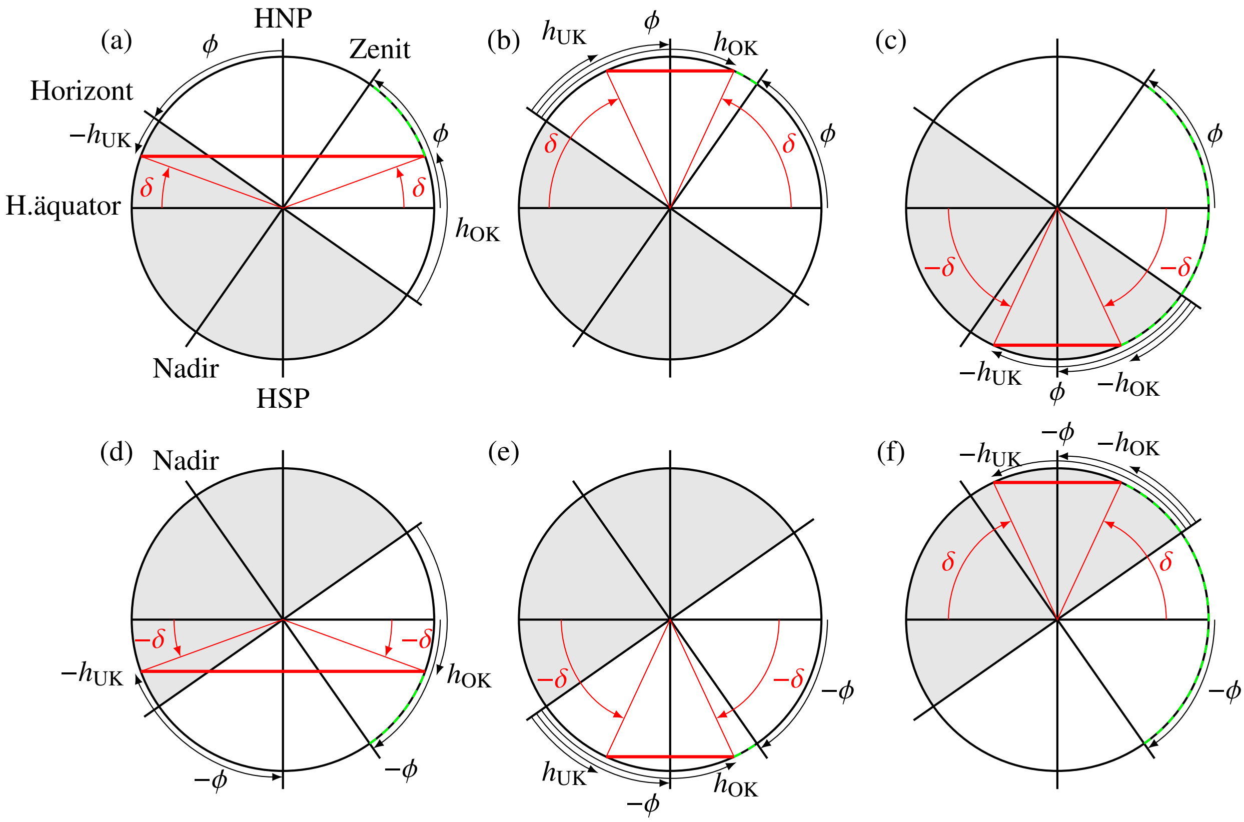

Abbildung 1: Sechs verschiedene Kombinationen aus geografischer Breite des Beobachters, ϕ, und Deklination eines Himmelsobjekts, δ. Die tägliche scheinbare Bahn des Objekts entlang eines Kleinkreises (in Seitenansicht) ist jeweils mit einer dicken horizontalen Linie markiert. Die obere Kulmination (also die maximale Höhe), h_{OK}, und die untere Kulmination (also die minimale Höhe), h_{UK} sind eingezeichnet. Der schwarz-grün gestrichelte Bogen ist jeweils die Entfernung zum Zenit während der oberen Kulmination.

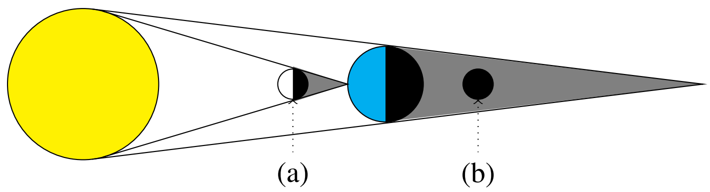

Abbildung 2: Position des Mondes bei (a) einer Sonnenfinsternis und (b) einer Mondfinsternis.

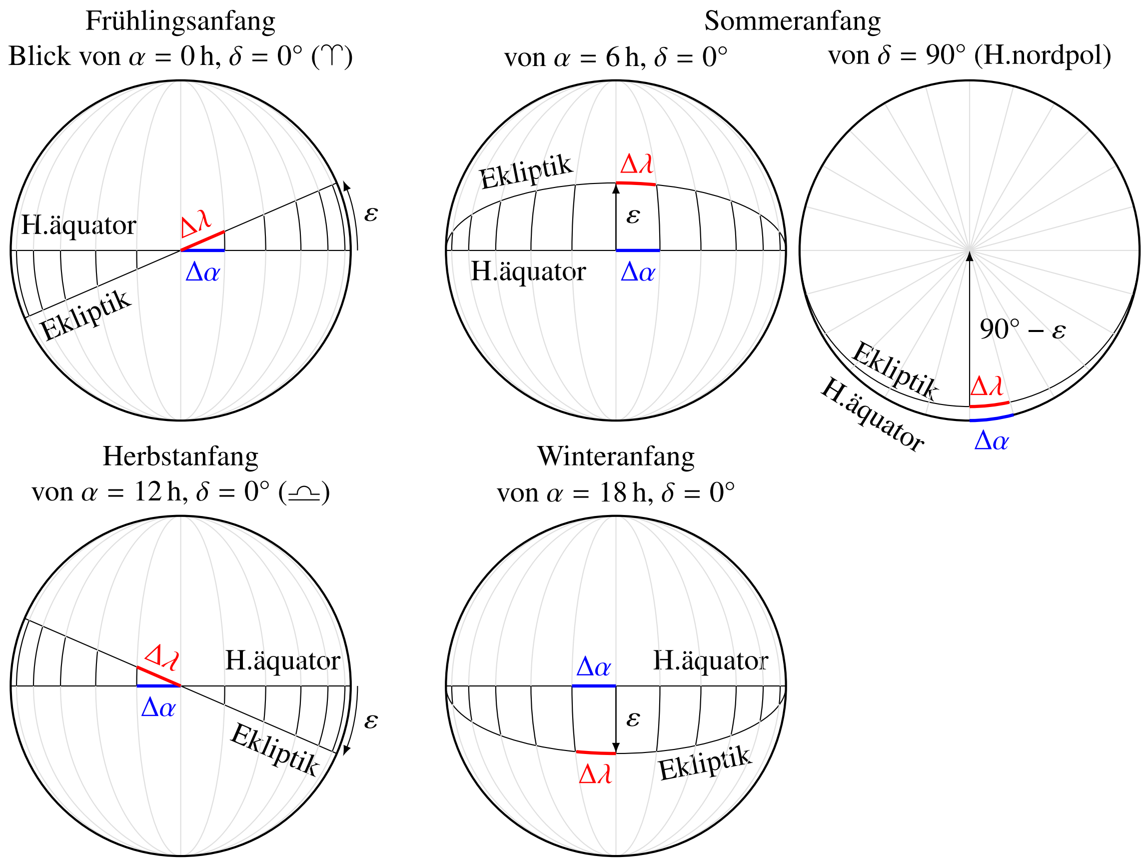

Abbildung 3: Die mittlere Sonne läuft gleichförmig entlang des Himmelsäquators (also α), die wahre (ungleichförmig) entlang der Ekliptik (also λ). Wenn die Erde auf einer Kreisbahn wäre, liefe die wahre Sonne sogar gleichförmig entlang der Ekliptik, also in immer gleichen Schritten $\Delta\lambda$ für gleiche Zeiten Δt. Für jedes entlang der Ekliptik zurückgelegte Stück $\Delta\lambda$ wandert ihre Rektaszension (und damit die mittelere Sonnenzeit) dabei um ein i.A. anderes Stück $\Delta\alpha$: (links) $\Delta\lambda \approx \Delta\alpha / \cos\varepsilon > \Delta\alpha$ in der Nähe des Frühlings- und des Herbstpunktes, (mittig und rechts) $\Delta\lambda \approx \Delta\alpha \cos\varepsilon < \Delta\alpha$ um den Sommer- und den Winteranfang.

selbst. Das heißt, selbst eine kreisförmige, aber geneigte scheinbare Sonnenbahn würde zu einer nichtkonstanten Zeitgleichung mit einer Periodendauer von einem halben Jahr führen.

Beginnen wir aber mit dem Zusammenhang zwischen Sonnenzeiten und -winkeln:

$$
\begin{aligned}
\eta &\equiv T - T_\mathrm{m} && \text{mit } T = t + 12\,\mathrm{h} \\
&= t - t_\mathrm{m} && \text{mit } t = \theta - \alpha \\
&= \alpha_\mathrm{m} - \alpha && \text{mit } \alpha_\mathrm{m} = \lambda \\
&= \lambda - \alpha, && \qquad (4)
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Ersetzung voraussetzt, dass sich die Erde auf einer Kreisbahn und die Sonne entsprechend gleichförmig entlang der Ekliptik bewegt. Entscheidend für den Verlauf der Zeitgleichung ist also der Unterschied zwischen der Position der Sonne relativ zur Ekliptik und relativ zum Himmelsäquator.

Man kann sich die Periodendauer und den Gangunterschied zwischen λ und α grafisch, ohne Rechnung veranschaulichen. Abbildung 3 stellt das Problem (und die Lösung) dar. Um den Frühlings- und den Herbstanfang haben wir identische Bedingungen. Die Sonne bewegit sich dann schneller entlang der Ekliptik als parallel zum Äquators, also $\Delta\lambda > \alpha$ oder $\dot\lambda > \dot\alpha$. Damit wächst zu dieses Zeiten der Wert der Zeitgleichung. Dazwischen, nahe Winter-/Sommeranfang, läuft α schneller als λ, also $\Delta\alpha > \Delta\lambda$ oder $\dot\alpha > \dot\lambda$. Der Wert der Zeitgleichung verringert sich. Auch die Periodendauer steht damit fest: ein halbes Jahr.

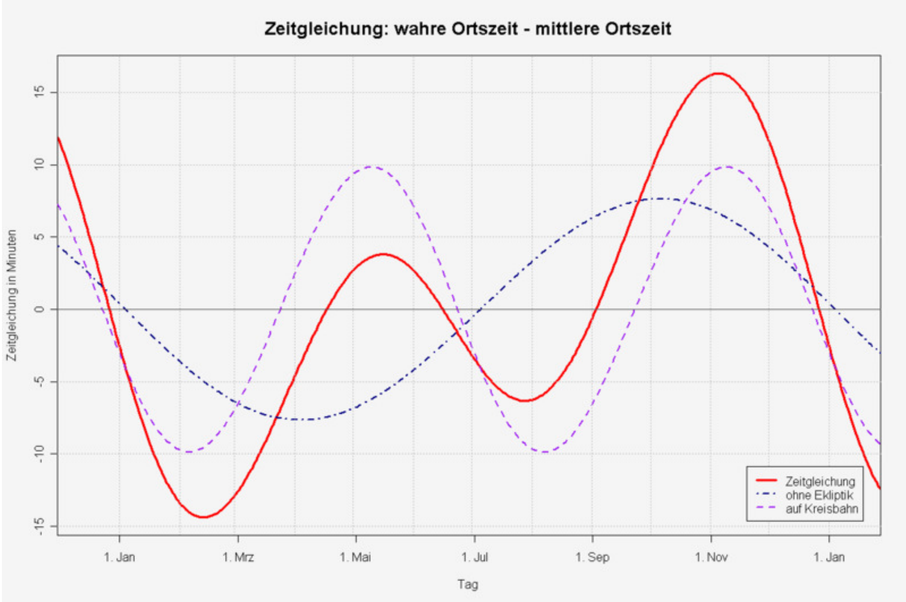

Abbildung 4: Reale Zeitgleichung, sowie Zeitgleichung für die fiktiven Fälle, dass die Äquatorebene mit der Ekliptik zusammenfiele (die Erdachse also nicht geneigt wäre), und dass die Erde auf einer Kreisbahn wäre. (Quelle der Grafik: WikiMedia Commons)

Zusatzinformation 1: In Formeln betrachtet ergeben die entsprechenden Transformationsgleichungen der sphärischen Trigonometrie (für ekliptische Breite $\beta = 0°$) folgendes: Aus

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos 90° = \cos\alpha\cos\delta \tag{5}$$

und

$$\sin\lambda\cos\epsilon = \sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta\cos 90° = \sin\alpha\cos\delta \tag{6}$$

resultiert

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta} &= \frac{\sin\lambda\cos\epsilon}{\cos\lambda} && (7) \\ \tan\alpha &= +\tan\lambda\cos\epsilon. && (8) \end{aligned}$$

Bei Winkeln nahe 0 bzw. 180° läuft α also um den Faktor $\cos\epsilon$ langsamer als λ. Für Winkel nahe bei 90 bzw. 270° kann man auch

$$\cot\lambda = \cot\alpha\cos\epsilon \tag{9}$$

schreiben. Hier läuft entsprechend λ langsamer als α.

Zusatzinformation 2: Zum anderen gibt es die Abweichung auf Grund der ungleichförmigen Bewegung entlang der Ellipse. Es gilt für eine Ellipse (siehe Vorlesung „Himmelsmechanik"):

$$r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{10}$$

sowie

$$r^2\dot{\theta} = \text{const.}, \tag{11}$$

wobei r den Abstand zum Brennpunkt, a die große Halbachse, e die numerische Exzentrizität und θ die sogenannte wahre Anomalie bezeichnet. Da ja, von der Erde aus gesehen, $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$ gilt (die wahre Bewegung der

Erde entspricht der scheinbaren der Sonne), folgt somit

$$\dot{\alpha} = \frac{\text{const.}}{r^2} = \left(\frac{1 + e\cos\theta}{a\cdot(1-e^2)}\right)^2 \cdot \text{const.} \tag{12}$$

Es gilt also

$$\dot{\alpha} \propto 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta. \tag{13}$$

Auch hier ergibt sich somit eine periodische Abweichung mit einer Periodendauer von einem Jahr (da $e < 1$). Überlagert ist ihr eine weitere halbjährige Schwingung mit geringerer Amplitude. Dieser Anteil der Abweichung ist minimal, wenn sich die Erde im sonnennächsten oder sonnenfernsten Punkt befindet, d.h. um den 3. Januar oder um den 5. Juli eines Jahres.