Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 1. Übungsserie

Aufgabe 1.1

Aus dem „*Universum in Zahlen*“ folgt die Anzahl der Menschen auf der Erde zu $7 \cdot 10^9$ und die Anzahl der Sterne in der Milchstrasse $\sim 10^{11}$. Das heißt, pro Person gibt es ein gutes dutzend Sterne. Auch ohne etymologische Kenntnisse ist es leicht zu sehen, dass sehr viel mehr Mücken pro Kopf existieren. Wer das nicht glaubt, soll einmal im Sommer in die sibirische Taiga fahren – oder an einen deutschen See. Selbst wenn die Mücken außer acht gelassen werden: Die Fläche der sibirischen Taiga beträgt knapp 10^{13} m^2. Wird also angenommen, dass auf je 100 m^2 mindestens 1 Baum kommt gibt es allein dort 10^{11} Bäume (also soviele wie Sterne in der Galaxis!), ganz zu Schweigen von den restlichen Wäldern auf der Welt. Schwirrt also unter jedem Baum nur eine Mücke, reicht die Anzahl aus, um die der Sterne in den Schatten zu stellen. (Und Mücken haben die Angewohnheit, meistens in Schwärmen aufzutreten...).

Ein anderer Vergleich: Die Bundesrepublik Deutschland hat eine Grundfläche von zirka $3{,}5 \cdot 10^{11}$ m^2 – d.h. es gibt ungefähr 0,3 Sterne pro m^2. Eine Zahl von 0,3 Mücken m^{-2} ist zwar sicherlich etwas zu hoch – allerdings bezieht sich die Rechnung ja nur auf Deutschland – weltweit werden die Mücken wieder die Oberhand haben…

Aufgabe 1.2

Noch bevor man eine genauere Rechnung macht, kann man schon grob abschätzen, dass sowohl die Ozeane mit einer Tiefe von einigen Kilometern als auch die Atmosphäre mit einer effektiven Höhe von 8 km in ihrer Dicke jeweils nur das äußerste Tausendstel der Erde ausmachen. Die Dichte des Wassers liegt außerdem etwa um einen Faktor von fünf unter der der Erde, die der Luft noch einen weiteren Faktor 1000. Somit haben die Ozeane etwa einen Anteil von 10^{-4}–10^{-3} an der Gesamtmasse, die Atmosphäre 10^{-7} bis 10^{-6}.

Will man es genauer rechnen, kann man zunächst tatsächlich die Volumina genauer abschätzen:

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{Erde}} &= \frac{4\pi R_{\mathrm{Erde}}^3}{3}, && (1)\\
V_{\mathrm{Ozean}} &= 4\pi R_{\mathrm{Erde}}^2 d_{\mathrm{Ozean}} \qquad \text{(Oberfläche mal Tiefe)}, && (2)\\
V_{\mathrm{Atmo}} &= 4\pi R_{\mathrm{Erde}}^2 d_{\mathrm{Atmo}} \qquad \text{(Oberfläche mal Höhe)}. && (3)
\end{aligned}
$$

Nimmt man noch die Dichten $\rho_{\mathrm{Erde}}, \rho_{\mathrm{Wasser}}, \rho_{\mathrm{Luft}}$ hinzu, ergibt sich für die Massenverhältnisse:

$$
\begin{aligned}
\frac{M_{\mathrm{Ozean}}}{M_{\mathrm{Erde}}} &= \frac{3 d_{\mathrm{Ozean}} \rho_{\mathrm{Wasser}}}{R_{\mathrm{Erde}} \rho_{\mathrm{Erde}}}, && (4)\\
\frac{M_{\mathrm{Atmo}}}{M_{\mathrm{Erde}}} &= \frac{3 d_{\mathrm{Atmo}} \rho_{\mathrm{Luft}}}{R_{\mathrm{Erde}} \rho_{\mathrm{Erde}}}. && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Bis auf den Faktor 3 war also schon die obige Abschätzung zutreffend.

Eine interessante Alternative für die Bestimmung von M_{Atmo} ist die folgende: Man nehme die gut bekannte Größe der Erdoberfläche $A_{\mathrm{Erde}} = 4\pi R_{\mathrm{Erde}}^2$ sowie auf selbiger den Normalluftdruck P und die Fallbeschleunigung g und berechne darüber elegant die Gesamtmasse der Atmospähre, die ja die Ursache für den am Boden herrschenden Luftdruck ist. Unter Zuhilfenahme der Gewichtskraft $F_{\mathrm{Atmo}} = M_{\mathrm{Atmo}} g$ hat man also

$$P = \frac{F_{\mathrm{Atmo}}}{A_{\mathrm{Erde}}} = \frac{M_{\mathrm{Atmo}} g}{A_{\mathrm{Erde}}} \tag{7}$$

und somit

$$M_{\mathrm{Atmo}} = \frac{P \cdot A_{\mathrm{Erde}}}{g} = \frac{P \cdot 4\pi R_{\mathrm{Erde}}^2}{g} \approx \frac{10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 12 \cdot (6 \times 10^6\ \mathrm{m})^2}{10\ \mathrm{m\ s^{-2}}} \approx 4 \times 10^{18}\ \mathrm{kg} \tag{8}$$

oder gleich

$$\frac{M_{\text{Atmo}}}{M_{\text{Erde}}} = \frac{P \cdot A_{\text{Erde}}}{M_{\text{Erde}} g} = 3\frac{P \cdot}{g R_{\text{Erde}} \rho_{\text{Erde}}} \approx \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{10 \text{ m s}^{-2} \cdot 6 \times 10^6 \text{ m} \cdot 5500 \text{ kg m}^{-3}} \approx 10^{-6}. \tag{9}$$

Man nähert hier die Fallbeschleunigung mit einer Konstanten für die Atmosphäre. Man nimmt also an, dass die vertikale Ausdehnung der Atmosphäre im Vergleich zum Erdradius vernachlässigbar ist. Generell bestimmt dabei natürlich der Zweck der Rechnung (oder eben Abschätzung), wie detailliert diese durchzuführen ist. Die Masse ins Verhältnis zur Erdmasse zu setzen, die Masse also in Einheiten der Erdmasse anzugeben, ist in jedem Fall nützlicher (weil aussagekräftiger und anschaulicher) als die hier ungeeignete Einheit Kilogramm.

Aufgabe 1.3

Für die Rechnung kann man annehmen, dass das Gesamtvolumen beim Strecken erhalten bleibt. Nähert man das sich ergebende Kabel mit einem Zylinder, so ist der Zusammenhang zwischen dessen Volumen V, Durchmesser d und Höhe bzw. Länge l gegeben zu

$$V = \frac{1}{4}\pi d^2 l. \tag{10}$$

Für die Erde als Kugel gilt gleichzeitig

$$V_\oplus = \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3. \tag{11}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} V &\overset{!}{=} V_\oplus \\ \frac{1}{4}\pi d^2 l &= \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3 \\ d &= 4\sqrt{\frac{R_\oplus^3}{3l}} \qquad (12) \\ \text{bzw.} \qquad l &= \frac{16 R_\oplus^3}{3d^2}. \qquad (13) \end{aligned}$$

Mit $R_\oplus \approx 6400$ km erhält man für die gegebenen Beispiele

$$\begin{aligned} d(l = 1\,\text{au} \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m}) &\approx 100\,\text{km} \qquad \text{(zur Sonne)} \qquad (14) \\ d(l = 1{,}3\,\text{pc} \approx 4 \cdot 10^{16}\,\text{m}) &\approx 190\,\text{m} \qquad \text{(zu } \alpha \text{ Cen)} \qquad (15) \\ d(l = 700\,\text{kpc} \approx 2 \cdot 10^{22}\,\text{m}) &\approx 25\,\text{cm} \qquad \text{(zu Andromeda)} \qquad (16) \end{aligned}$$

sowie

$$l(d = 3\,\text{mm}) \approx 1{,}5 \cdot 10^{26}\,\text{m} \approx 16 \cdot 10^9\,\text{ly}. \tag{17}$$

Das heißt, das 3 mm dünne Kabel könnte bei einer Länge von 16 Mrd. Lichtjahren bereits über das sichtbare Universum hinaus reichen.