Übung zur Vorlesung Neutronensterne WiSe 2013/14

Übungszettel 2 (8. November 2013)

Abgabe: bis Freitag, 15. November, bei der Vorlesung oder Übung
Besprechung in der Übung am 22.11.

Übung: Fr 16-18h (Dr. Tobias Schmidt), Beginn 16:15h

1. Schätzen Sie den Radius eines Neutronensterns in Abhängigkeit von seiner Massendichte ρ grob ab. Führen Sie diese Abschätzungen einmal für den Fall eines vollständig entarteten nichtrelativistischen Neutronengases und einmal für den Fall eines vollständig entarteten ultrarelativistischen Neutronengases durch. Die Radien sollen jeweils nur noch eine Funktion der Massendichte sein. Nehmen Sie vereinfacht an, daß ρ=const. ist und vernachlässigen Sie allgemeinrelativistische Effekte.
   Welche Werte nehmen die Radien für $\rho = \rho_{nuc}$ und $\rho = 10^{18}\ kg/m^3$ an? Wie groß sind die entsprechenden Massen? (5 Punkte)

2. Falls sich Weiße Zwerge tatsächlich durch ein Elektronengas beschreiben lassen, liefern sie auf einfachem Weg eine Abschätzung für die Grenzdichte, bei der Neutronen stabil sind - inwiefern, und was ist das Ergebnis? (1 Punkt)

3. Es sei

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \tag{1}$$

   In der Vorlesung wird behauptet, daß für das vollständig entartete Neutronengas gilt: $\Phi(x) \sim x^5$ (nichtrelativistischer Grenzfall), bzw. $\Phi(x) \sim x^4$ (ultrarelativistischer Grenzfall), wobei $x = p_F/(mc)$ ist. Beweisen Sie diese Aussagen und gehen Sie dabei wie folgt vor:

   (a) Integrieren Sie $\Phi(x)$ (3 Punkte).
   Ergebnis: $\Phi(x) = 3/8\ \mathrm{arcsinh(x)}\ - 3/8\ \mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}^2+1}\ + 1/4\ \mathrm{x}^3\sqrt{\mathrm{x}^2+1}$

   (b) Zeigen Sie, daß $\ln(\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{x}^2+1}) = \mathrm{arcsinh(x)}$ ist und nutzen Sie diese Beziehung (1 Punkt).

   (c) Nähern Sie nun für beide Grenzfälle (3 Punkte).